EJERCICIO 1

Cuestión 1 *Determina los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ para que los vectores:*

$$\vec{v}_1 = (1,3,4,\beta),\ \vec{v}_2 = (1,\alpha,\alpha,0),\ \vec{v}_3 = (-1,\alpha,0,\beta)$$

sean linealmente dependientes. Encuentra una relación de dependencia entre ellos y las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio que generan.

EJERCICIO 1 - SOLUCIÓN

Por la caracterización de sistemas ligados, sabemos que deben existir $x, y, z \in \mathbb{Q}$, no todos nulos, tales que

$$x(1,3,4,\beta) + y(1,\alpha,\alpha,0) + z(-1,\alpha,0,\beta) = (0,0,0,0)$$

es decir, el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 0 \\ 3x+ & \alpha y+ & \alpha z = & 0 \\ 4x+ & \alpha y & = & 0 \\ \beta x+ & & \beta z = & 0 \end{array}\right\}$$

debe tener soluciones no triviales. Vamos a encontrar una matriz escalonada asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 4 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - \beta F_1]{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha - 3 & \alpha + 3 \\ 0 & \alpha - 4 & 4 \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha - 4 & 4 \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4+\beta F_2]{F_3+(4-\alpha)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+5\alpha \\ 0 & 0 & \beta(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

Para que tenga soluciones no triviales debe verificarse que:

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha^2+5\alpha=0 \\ \beta(\alpha+1)=0 \end{array}\right\} \to \alpha=0 \text{ y } \beta=0 \qquad \text{ó} \qquad \alpha=5 \text{ y } \beta=0$$

En estos casos la matriz escalonada sería:

$$\xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\delta \\ y=(1-\alpha)\delta \\ z=\delta \end{array}\right\} \forall \delta \in \mathbb{Q}$$

Para $\alpha = 0$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \delta \\ z = \delta \end{array}\right\} \forall \delta \in \mathbb{Q}$$

Por lo que una relación entre ellos vendría dada por:

$$\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Si $\alpha = 5$,

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\delta \\ y = -4\delta \\ z = \delta \end{array}\right\} \forall \delta \in \mathbb{Q}$$

y una relación sería:

$$5\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Para $\alpha = 0$ el subespacio está generado por los dos primeros vectores, obteniendo las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$(x, y, z, t) = \lambda_1(1, 3, 4, 0) + \lambda_2(1, 0, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 3\lambda_1 \\ z = 4\lambda_1 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

De la ecuación segunda obtenemos que $\lambda_1 = \frac{1}{3}y$ y de la ecuación primera que $\lambda_2 = x - \frac{1}{3}y$, sustituyendo en las ecuaciones tercera y cuarta se obtienen las dos ecuaciones implícitas necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} 4y - 3z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

Del mismo modo, para $\alpha = 5$ eliminamos el vector $\vec{v}_2$ ya que es combinación lineal de los demás

$$(x, y, z, t) = \lambda_1(1, 3, 4, 0) + \lambda_2(-1, 5, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 - \lambda_2 \\ y = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ z = 4\lambda_1 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

De la ecuación tercera obtenemos que $\lambda_1 = \frac{1}{4}z$ y de la ecuación primera que $\lambda_2 = -x + \frac{1}{4}z$, sustituyendo en las ecuaciones segunda y cuarta se obtienen las dos ecuaciones implícitas necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 2

Ejercicio 1 *Haga los pasos siguientes:*

$$\begin{matrix}\textit{Sistema} \\ \textit{generador}\end{matrix} \underset{(6)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} \textit{Base} \underset{(5)}{\overset{(2)}{\rightleftarrows}} \begin{matrix}\textit{Ecuaciones} \\ \textit{paramétricas}\end{matrix} \underset{(4)}{\overset{(3)}{\rightleftarrows}} \begin{matrix}\textit{Ecuaciones} \\ \textit{implícitas}\end{matrix}$$

con el subespacio de $\mathbb{R}^5$

$$U = \langle (1,1,1,1,1),(2,-1,2,-3,1),(3,0,3,-3,1),(1,1,1,0,0) \rangle$$

obteniendo de esta forma las distintas descripciones de U

1. Encontrar una base de U.
2. Obtener unas ecuaciones paramétricas del subespacio U.
3. Obtener unas ecuaciones implícitas de U

EJERCICIO 2 - SOLUCIÓN

1. Encontrar una base de U.

SOLUCIÓN:Sistema generador $\xrightarrow{(1)}$ Base

Cada vector se coloca como fila de una matriz, y se pasa a una matriz escalonada. Las filas no nulas de la matriz escalonada constituyen una base del subespacio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se elimina la última fila, que es nula y se obtiene la base siguiente:

$$\mathscr{B} = \{(1,1,1,1,1),(0,-3,0,-5,-1),(0,0,0,1,1)\}$$

2. Obtener unas ecuaciones paramétricas del subespacio U.

Base $\xrightarrow{(2)}$ Ecuaciones paramétricas

Se escribe un elemento genérico como combinación lineal de la base y se obtienen las ecuaciones:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \alpha_1(1,1,1,1,1) + \alpha_2(0,-3,0,-5,-1) + \alpha_3(0,0,0,1,1)$$

y unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 \\ x_5 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

3. Obtener unas ecuaciones implícitas de U

Se eliminan los parámetros hasta obtener un sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 \\ x_5 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

De la ecuación primera obtenemos

$$\alpha_1 = x_1$$

de la segunda

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$

y de la quinta:

$$\alpha_3 = x_5 - \alpha_1 + \alpha_2 = x_5 - x_1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_5$$

llevando estos resultados a las ecuaciones 3 y 4, que son las que no hemos utilizado aún, obtendremos 2 ecuaciones implícitas de U:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = x_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = x_1 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 3

12. En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios E_1 y E_2 generados por los vectores (1,1,1,1) y (1,-1,1,-1) para E_1, y (1,2,0,1), (1,2,1,2) y (3,1,3,1) para E_2.

Hallar las dimensiones del subespacio intersección y del subespacio suma.

EJERCICIO 3 - SOLUCIÓN

Observamos que $dim\, E_1 = 2$ ya que (1,1,1,1) , (1,-1,1,-1) son independientes.

Veamos cuál es el subespacio $E_1 \cap E_2$: si $v \in E_1 \cap E_2$, entonces

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1,-1) = \\ &= \mu_1(1,2,0,1) + \mu_2(1,2,1,2) + \mu_3(3,1,3,1) \end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 3\mu_2 + 4\mu_3 \\ 2\lambda_2 &= -\mu_2 + 2\mu_3 \end{aligned}\right\}$$

por lo que, dando valores cualesquiera a los escalares μ_2, μ_3 , obtendremos los vectores de $E_1 \cap E_2$, y puesto que hay dos parámetros libres $dim E_1 \cap E_2 = 2$

Por ejemplo, para $\mu_2 = -1, \ \mu_3 = 1$, se tiene

$$w_1 = (3,1,3,1) - (1,2,1,2) = (2,-1,2,-1) \in E_1 \cap E_2$$

para $\mu_2 = \mu_3 = 1$

$$w_2 = (1,2,1,2) + (3,1,3,1) = (4,3,4,3) \in E_1 \cap E_2$$

observamos que w_1 y w_2 son independientes por lo que $dim\, E_1 \cap E_2 \geq 2$ y puesto que

$$E_1 \cap E_2 \subset E_1 \quad \text{y} \quad dim\, E_1 = 2$$

se tiene que $E_1 \cap E_2 = E_1$ y $dim\, E_1 \cap E_2 = 2$.

Sabemos que $dim\,(E_1+E_2) = dim\, E_1 + dim\, E_2 - dim\,(E_1 \cap E_2)$, luego $dim(E_1+E_2) = dim\, E_2$.

(Tenemos que $E_1 + E_2 = E_2$, pues $E_2 \subset E_1 + E_2$ y tienen la misma dimensión).

EJERCICIO 4

10. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ relacionadas mediante:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 - 3b_2 + 4b_3 \\ a_2 = b_2 + b_3 \\ a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

a) Hallar la matriz que transforma las coordenadas de los vectores de la base B a la A.

b) Sea $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ una nueva base cuyas coordenadas respecto de B son:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - b_2 + b_3 \\ c_2 = -b_1 + b_2 \\ c_3 = b_2 - b_3 \end{cases}$$

Hallar la matriz de transformación de B a C y de A a C.

EJERCICIO 4 - SOLUCIÓN

a) Recordemos que la matriz S de paso de A a B es la matriz cuadrada cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de A expresados en la base B. Luego:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de paso de } A \text{ a } B$$

y esta matriz es tal que si componemos dicha matriz con un vector columna cuyos componentes son las coordenadas de un vector de $\mathbf{R}^3$ en la base A, el resultado es el mismo vector (vector columna) cuyos componentes son las coordenadas del vector, pero expresado en la base B.

Obviamente, la matriz de paso de B a A será

$$S^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que necesitamos la expresión de los vectores de la base B en función de la base A, por lo que tenemos que invertir el sistema dado).

b) Análogamente, la matriz de paso de C a B es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

luego, la matriz de paso de B a C es

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si componemos las matrices S y T^{-1}

$$T^{-1} \circ S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nos proporciona, obviamente, la matriz de paso de A a C.

EJERCICIO 5

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$ consideramos $S = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Hallar las ecuaciones implícitas de S.
b) Hallar una base de T
c) Halla, si es posible, una base de $S \cap T$.
d) Hallar una base de S+T
e) Razonar si S+T es suma directa. Razonar si S y T son suplementarios y en caso de no serlo, hallar un suplementario de S.

EJERCICIO 5 - SOLUCIÓN

a) Hallar las ecuaciones implícitas de S.
Primero buscamos, a partir del sistema de generadores de S dado, una base de S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de S serán: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y eliminando los parámetros a, b, c

obtendremos las ecuaciones implícitas de S:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & x_5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 + x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_5 - 2x_2 - x_3 + x_2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

b) Hallar una base de T: para ello resolvemos el sistema homogéneo dado por las ecuaciones implícitas de T,

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a + 2b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = a + b \\ x_4 = b \\ x_5 = a \end{cases} \Rightarrow B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Hallar, si es posible, una base de S∩T: para ello resolvemos el sistema homogéneo dado por las ecs. implícitas de T y de S,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2a \\ x_4 = a \\ x_5 = a \end{cases} \Rightarrow B_{T\cap S} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Hallar una base de S+T: como **S+T=L{$B_S \cup B_T$}** buscamos, a partir del sistema de generadores **$B_S \cup B_T$** de **S+T**, una base de S+T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Razonar si S+T es suma directa: NO es suma directa ya que $S \cap T$ no es el s.v. trivial cero, es decir, $S \cap T \neq \{(0,0,0,0,0)\}$.
Razonar si S y T son suplementarios, y en caso de no serlo hallar un suplementario de S.

S y T NO son suplementarios, ya que no son suma directa. Para obtener un suplementario se S extendemos la base de S, obtenida en el apartado a), a una base de $\mathbb{R}^5$, y los vectores añadidos serán una base de un suplementario de S.

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{\mathbb{R}^5} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Sup de } S = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar la fórmula de la dimensión de la suma: dimS=3, dimT=2, dim(S+T)=4 y dimS∩T =1, por tanto, dim(S+T)=dimS+dimT-dimS∩T

EJERCICIO 6

1.2 Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ x - 2y = 0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, referido a la base canónica. Calcular las ecuaciones de U con respecto a la base $B = \{(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$.

EJERCICIO 6 - SOLUCIÓN

Lo podemos hacer de dos formas. Una sería obtener una base del subespacio referida a la base canónica y mediante el cambio de base obtener la nueva base del subespacio referida a la base dada y a partir de ellos obtener las ecuaciones implícitas que ya estarán referidas a la nueva base, veámoslo

$$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -2y & & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_U = \{(2,1,3)\}_C$$

este vector base de U está referido a la base canónica, veamos su expresión en la nueva base B,

$$(2,1,3) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2 & = & x & +y & \\ 1 & = & & y & +z \\ 3 & = & x & & +z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}.$$

Ahora obtenemos las ecuaciones implícitas,

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \\ 0 & z-\frac{1}{2}x \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ z-\frac{1}{2}x & = & 0 \end{array}\right\}$$

Otra forma sería obtener directamente las ecuaciones a partir de las ecuaciones referidas a la base canónica, para ello obtenemos los coeficientes de las nuevas ecuaciones a partir de los dados multiplicando éstos por la matriz cuyas filas son los vectores de la nueva base:

$$x + y - z = 0 \longrightarrow (1, 1, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tanto la nueva ecuación será $2y = 0$.

$$x - 2y = 0 \longrightarrow (1, -2, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por tanto la nueva ecuación será $x - y - 2z = 0$.
Las ecuaciones implícitas referidas a la nueva base son, por tanto

$$\left.\begin{array}{cccc} & 2y & & = & 0 \\ x & -y & -2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

que aunque tengan una expresión distinta representan las mismas rectricciones para las coordenadas de los vectores de dicho subespacio que las obtenidas anteriormente.

EJERCICIO 7

Hallar el núcleo, el rango y la nulidad de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 – SOLUCIÓN

El núcleo de A es el conjunto solución del sistema $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$ Para resolverlo obtenemos la forma escalonada reducida de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to (F2 \leftrightarrow F4) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to (F2 \to F2 - 2 \cdot F1)\ y\ (F3 \to F3 - F1) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to (F3 \leftrightarrow F4) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$(F4 \to F4 - F2)\ y\ (F3 \to F3 + F2) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to (F2 \to (-1) \cdot F2) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el conjunto solución está representado por el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Tomando como variables libres las que no tienen pivote, es decir, $x_3 = s$ y $x_4 = t$, obtenemos las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -s - 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el núcleo de A es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{(-1, 1, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)\}$.

La nulidad de A es 2 (dimensión de $N(A)$ y el rango es 2, de acuerdo con la ley de dimensiones:

$$n = rango(A) + nul(A)$$

$$4 = rango(A) + 2 \Longrightarrow rango(A) = 4 - 2 = 2$$